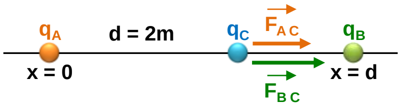
Universidad de Castilla la Mancha – Junio 2.010

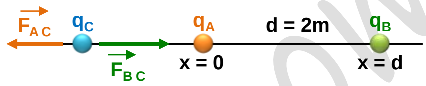
Opción A

Problema 1.- Dos cargas eléctricas puntuales fijas A y B, de signos opuestos y alineadas a lo largo del eje X, están separadas una distancia de 2 m. La carga A es 9 veces mayor que la carga B. Calcular en qué punto del eje X se encontraría en equilibrio una carga C del mismo signo que la carga A y el mismo valor absoluto que la carga B.
Razónese brevemente y con claridad si la carga C debe encontrarse situada en el segmento que une a las cargas A y B o si se encontrará fuera del mismo (es muy conveniente hacer esquemas claros de cada situación). Para los cálculos tómese la posición de la carga A como origen de coordenadas.

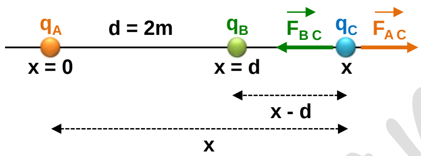
Si la carga C se encuentra dentro del segmento que une a las otras dos, A repele a C; B atrae a C y las dos fuerzas tienen el mismo sentido, **no puede haber equilibrio**.



Si la carga C se encuentra a la izquierda de A, siempre estará más cerca de A que de B, y puesto que $q_A = 9\ q_B$, siempre se cumplirá $F_{AC} > F_{BC}$ y **no puede haber equilibrio**.



Solamente cuando C esté a la derecha de B es posible que la fuerza atractiva F_{BC} compense a la fuerza repulsiva F_{AB}, y sólo en este caso **puede haber equilibrio**.

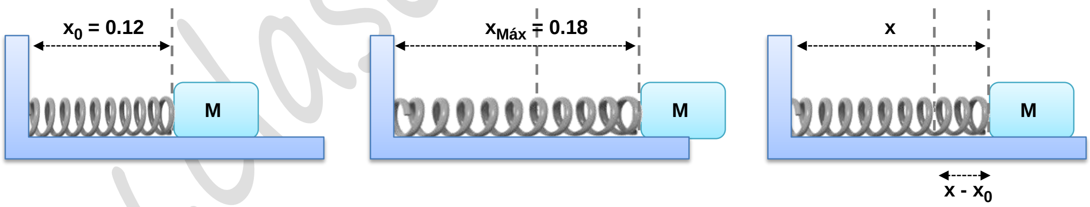


En el equilibrio:

$$\left|\vec{F}_{AC}\right| = \left|\vec{F}_{BC}\right| \rightarrow K\frac{|q_A|\,|q_C|}{x^2} = K\frac{|q_B|\,|q_C|}{(x-d)^2} \rightarrow \frac{9\ q^2}{x^2} = \frac{q^2}{(x-d)^2} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{x-d} \rightarrow 3x - 3d = x \rightarrow 2x = 3d = 6 \rightarrow \mathbf{x = 3\ m}$$

Problema 2.- Un muelle de 12 cm de longitud, de masa despreciable, tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical mientras que otro está unido a una masa que descansa en una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 30N para mantenerlo estirado hasta una longitud de 18 cm. En esta posición se suelta para que oscile libremente con una frecuencia angular de 3,14 rad/s. calcular:

a) La constante recuperadora del resorte.
b) La masa que oscila.
c) La ecuación del MAS resultante.
d) Las energías cinética y potencial cuando x= 3 cm



$$|F| = -k\,(x_{Máx} - x_0) \rightarrow k = \frac{|F|}{|x_{Máx} - x_0|} = \frac{30}{|0.18 - 0.12|} \rightarrow \mathbf{k = 500\ ^{N}/_{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{500}{(3.14)^2} \rightarrow \mathbf{m = 50.7\ kg}$$

$$x = A\ \text{sen}\,(\omega t + \delta_0) \rightarrow \mathbf{t = 0} \rightarrow x = x_{Máx} - x_0 \rightarrow \mathbf{x = 0.06\ m} \rightarrow 0.06 = 0.06\ \text{sen}\,(\delta_0) \rightarrow \text{sen}\,(\delta_0) = 1 \rightarrow \boldsymbol{\delta_0 = \frac{\pi}{2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{x(t) = 0.06\ sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_P = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}\,500\ 0.03^2 \rightarrow \mathbf{E_P = 0.225\ Jul} \rightarrow E_M = \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}\,500\ 0.06^2 \rightarrow \mathbf{E_M = 0.9\ Jul} \rightarrow E_M = E_C + E_P \rightarrow \mathbf{E_C = 0.675\ Jul}$$

Cuestión 1.- Un protón (núcleo de hidrógeno) y una partícula α (núcleo de helio, cuya carga es doble y cuya masa es muy aproximadamente cuatro veces mayor que la del protón) han sido disparados por un cañón de iones con la misma velocidad y entran en una zona donde existe un campo magnético uniforme cuyas líneas son perpendiculares a la velocidad de las partículas. ¿Cuál de las dos partículas describirá una órbita de mayor radio? Explíquese.

La fuerza magnética sobre las partículas cargadas que se mueven dentro de un campo $\vec{B}$ es una fuerza centrípeta cuyo valor es:

$$F = q \cdot v \cdot B = \frac{m\ v^2}{R}$$

El radio será:

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \rightarrow \begin{cases} R_H = \dfrac{m_H \cdot v}{q_H \cdot B} \\ R_\alpha = \dfrac{m_\alpha \cdot v}{q_\alpha \cdot B} \end{cases} \rightarrow \frac{R_H}{R_\alpha} = \frac{m_H \cdot q_\alpha}{q_H \cdot m_\alpha} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{R_H = \frac{R_\alpha}{2}}$$

Es decir, el radio de la órbita descrita por la partícula α es mayor que el del protón.

Cuestión 2.- La sonda Cassini de la NASA está explorando en la actualidad el sistema de lunas de Saturno. La masa de Titán, la mayor de ellas, es el 2.26% de la masa de la Tierra, y su radio es el 40% del radio de la Tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de Titán? (g_{Tierra}= 9,8 m s^{-2})

$$\begin{matrix} g_{Titán} = G \dfrac{m_{Titán}}{R_{Titán}^2} \\ g_T = G \dfrac{m_T}{R_T^2} \end{matrix} \rightarrow \frac{g_{Titán}}{g_T} = \frac{G \dfrac{m_{Titán}}{R_{Titán}^2}}{G \dfrac{m_T}{R_T^2}} \rightarrow g_{Titán} = g_T \frac{m_{Titán}}{m_T} \left(\frac{R_T}{R_{Titán}}\right)^2 = 9.8 \, \frac{2.26}{100} \left(\frac{1}{0.40}\right)^2 \rightarrow \mathbf{g_{Titán} = 1.38 \ {}^{m}/_{s^2}}$$

Cuestión 3.- La luz amarilla procedente de una lámpara de sodio tiene una longitud de onda de 589 nm. Cierto emisor de microondas produce una radiación de 5,89 milímetros. ¿Cuál de las dos transporta más energía? ¿Cuántas veces más?
Constante de Planck h = 6´626·10^{-34} J; velocidad de la luz en el vacío c = 3·10^{8} m/s.

Aplicando la ley de Planck:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \begin{cases} E_{Na} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{Na}} \\ E_{MW} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{MW}} \end{cases} \rightarrow \frac{E_{Na}}{E_{MW}} = \frac{h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{Na}}}{h \cdot \dfrac{c}{\lambda_{MW}}} = \frac{\lambda_{MW}}{\lambda_{Na}} \rightarrow \frac{E_{Na}}{E_{MW}} = \frac{5.89 \cdot 10^{-3}}{5.89 \cdot 10^{-9}} \rightarrow \mathbf{\frac{E_{Na}}{E_{MW}} = 10^4}$$

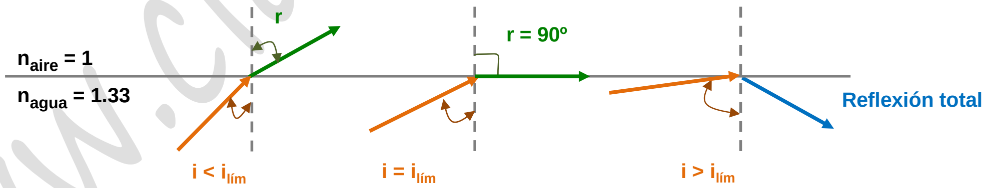
Es decir, la luz procedente de la lámpara de sodio, transporta 10000 veces más energía.

Cuestión Experimental.- En un laboratorio se ha experimentado con un haz luminoso cuando incide desde el agua hacía el aire (n_{aire}=1) para observar el fenómeno de la reflexión total.

a) ¿A qué llamamos ángulo límite?
b) ¿Qué condiciones deben cumplir los medios para que se produzca la reflexión total?
c) Calcula el ángulo límite sabiendo que el índice de refracción del agua es 1,33
d) Realiza un dibujo que muestre la reflexión total indicando los nombres correspondientes a los diferentes rayos y ángulos.

(a) Cuando la luz pasa de un medio de índice de refracción superior a otro inferior el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia. El ángulo límite es aquel ángulo de incidencia para el cual el ángulo de refracción es 90º.

(b) La reflexión total se produce cuando el ángulo de incidencia sobre la interfase del rayo que procede del medio de mayor índice de refracción es mayor que el ángulo límite. En este caso no hay rayo refractado, toda la luz se refleja.



Aplicando la ley de Snell:

$$n_{agua} \cdot \text{sen}\ \alpha_{Lím} = n_{aire} \cdot \text{sen}\ 90 \rightarrow \alpha_{Lím} = \text{arc.sen}\left(\frac{n_{aire}}{n_{agua}}\ \text{sen}\ 90\right) \rightarrow = \text{arc.sen}\left(\frac{1}{1.33}\right) \rightarrow \mathbf{\alpha_{Lím} = 48.8º}$$

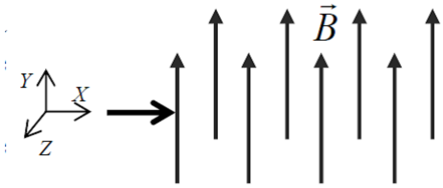
Opción B

Problema 1.- Un haz de protones de energía 208 eV entra en una región donde hay un campo magnético uniforme de 0,08 T perpendicular a su trayectoria. Se pide:

a) Determinar la velocidad y el radio de curvatura de la trayectoria que los protones describirán dentro del campo magnético. Indicar si el haz se desviará hacia la derecha o hacia la izquierda (suponemos que el haz viaja en sentido del eje x positivo y el campo magnético es perpendicular al plano xz, como muestra la figura)

b) Calcular el tiempo que los protones tardan en describir una órbita completa alrededor de las líneas del campo magnético.

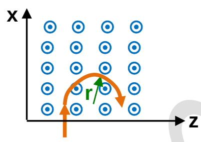
Datos: masa del protón $1´67 \cdot 10^{-27}$ kg; carga del protón $1´602 \cdot 10^{-19}$ C



La fuerza magnética sobre cargas móviles está dada por:

$$\left|\vec{F}\right| = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Como q > 0 y el sentido de la fuerza es el mismo del producto vectorial:



y (sentido saliente)

$$\vec{B} = B_0 \cdot \vec{j} \rightarrow B_0 = 0.08\ T$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\,E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 208 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{1.67 \cdot 10^{-27}}} \rightarrow \mathbf{v_0 = 199765\ ^{m}/_{s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} = B_0 \cdot \vec{j} \rightarrow B_0 = 0.08\ T \rightarrow \mathbf{\vec{B} = 0.08 \cdot \vec{j}} \\ \vec{v} = v_0 \cdot \vec{i} \rightarrow \mathbf{\vec{v} = 199765 \cdot \vec{j}} \end{array}\right\} \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0.08 & 0 \\ 199765 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{15981.2\,\vec{k}}$$

Visto desde arriba, la desviación es **a la derecha**.

Por tanto, la fuerza magnética de los protones a la entrada será:

$$\left|\vec{F_m}\right| = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q \cdot v_0 \cdot B_0 \cdot \vec{k}$$

Y la fuerza centrípeta será:

$$F_C = \frac{m \cdot v_0^2}{R}$$

Como ambas fuerzas deben ser de igual magnitud:

$$F_m = F_C \rightarrow q \cdot v_0 \cdot B_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{R} \rightarrow R = \frac{m \cdot v_0}{q \cdot B_0} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 199765}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.08} = 0.026 \rightarrow \mathbf{R = 2.6\ cm}$$

Los protones recorren su órbita de radio R con velocidad constante v_0:

$$T = \frac{2\pi\, R}{v_0} = \frac{2\pi \cdot 0.026}{199765} \rightarrow \mathbf{T = 8.19 \cdot 10^{-7}\ s}$$

Problema 2.- Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 300 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia de la superficie terrestre que es igual a 3/4 del radio de la Tierra. Calcula:

a) Velocidad y periodo que tendrá el satélite en la órbita

b) La energía cinética, potencial y mecánica del satélite en la órbita

c) La intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.

Datos: G = $6´67 \cdot 10^{-11}$ N m^2kg^{-2}, M_{TIERRA}= $5´98 \cdot 10^{24}$ kg, R_{TIERRA}= 6370 km

La fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite tiene que ser igual a la fuerza centrípeta, para que el satélite no salga despedido de la órbita:

$$\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F_c}\right| \rightarrow G\,\frac{m \cdot m_T}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{\left(1+\frac{3}{4}\right)R_T}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{\left(\frac{7}{4}\right)6.37 \cdot 10^6}} \rightarrow \mathbf{v = 5982\ ^{m}/_{s}}$$

$$T = \frac{2\pi\, R}{v_0} = \frac{2\pi \cdot \left(\frac{7}{4}\right)6.37 \cdot 10^6}{5982} \rightarrow \mathbf{T = 11709\ s = 3h\ 15\ min}$$

$$E_p = -\,G \cdot \frac{m_T \cdot m}{R} = -\,6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 300}{\left(\frac{7}{4}\right)6.37 \cdot 10^6} \rightarrow \mathbf{E_P = 1.073 \cdot 10^{10}\ Jul}$$

$$E_C = G \cdot \frac{m_T \cdot m}{2R} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 300}{\left(\frac{7}{4}\right)6.37 \cdot 10^6} \rightarrow \mathbf{E_C = 5.36 \cdot 10^9\ Jul}$$

$$E_M = E_c + E_p \rightarrow \mathbf{E_M = -5.37 \cdot 10^9\ Jul}$$

La intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite:

$$g = G \cdot \frac{m_T}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{\left(\frac{7}{4} 6.37 \cdot 10^{6}\right)^2} \rightarrow \mathbf{g = 3.20\ ^{m}/_{s^2}}$$

Cuestión 1.-

a) ¿De qué depende el potencial eléctrico? ¿Qué unidad tiene?
b) Un campo eléctrico uniforme es paralelo al eje OX. ¿En qué dirección puede ser desplazada una carga en este campo sin que se realice trabajo sobre ella? Razónese la respuesta.

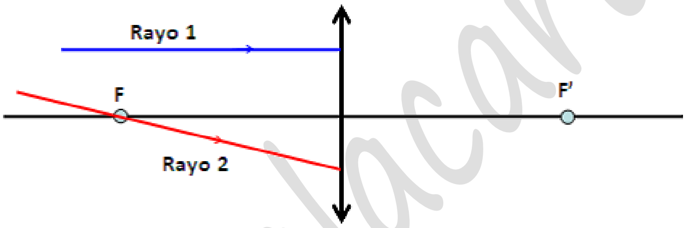
(a) El potencial alrededor de una carga q depende de la naturaleza del medio que la rodea (constante k), del valor de la carga y de la distancia r desde la carga al punto donde se calcula el potencial. Su unidad es el voltio:

$$V = k \cdot \frac{q}{R} \qquad 1\ V = \frac{1\ Jul}{C}$$

(b) Una carga puede puede ser desplazada en un campo sin realizar trabajo si se mueve a lo largo de una línea o superficie equipotencial. Ya que así la fuerza que el campo ejerce sobre la carga es perpendicular al desplazamiento y su producto escalar nulo.

Cuestión 2.-

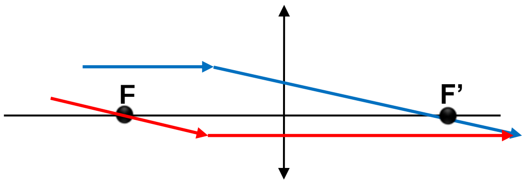
a) Sobre la lente convergente mostrada en la figura inciden los rayos 1 y 2 procedentes del espacio objeto. Prolónguese la trayectoria de ambos rayos una vez se refractan en la lente. ¿Cuál es el criterio seguido para hacerlo?
b) Dibuja la trayectoria de los rayos en el caso de que la lente fuera divergente.



Convergente

El rayo 1 que incide paralelamente al eje óptico, se refracta pasando por el foco imagen F'.

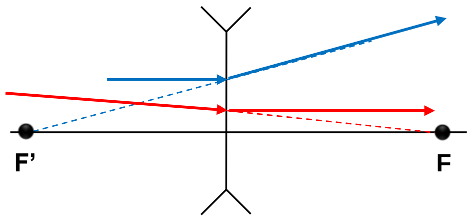
El rayo 2 que alcanza la lente pasando por el foco objeto F, se refracta de modo que emerge de la lente paralelamente al eje óptico del sistema.



Divergente

El rayo 1 que entra en paralelo al eje óptico se refracta de forma que la prolongación del refractado pasa por F'.

El rayo 2 que entra apuntando al foco F, se refracta paralelo al eje óptico.



Cuestión 3.-

a) El núcleo radiactivo del uranio-238 (92 protones y 146 neutrones) emite una partícula α dando lugar a un núcleo X que a su vez se desintegra emitiendo una partícula β y originando un núcleo Y. Comparar el número atómico y la masa atómica del núcleo original de uranio y del núcleo Y.
b) En el año 1898 Marie y Pierre Curie aislaron 220 mg de radio. El periodo de semidesintegración del radio es 1620 años. ¿A qué cantidad de radio han quedado reducidos en la actualidad (año 2010) los 220 mg?

Cada vez que se emite una partícula α el número atómica del núcleo progenitor disminuye en 2 unidades y su número másico se reduce en 4 unidades. Cuando se emite una partícula β el Z aumenta en una unidad y el A no varía:

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}X + \alpha \qquad {}^{234}_{90}X \rightarrow {}^{234}_{91}Y + \beta$$

El núcleo Y tiene 91 protones. Es un núcleo del elemento que antecede al uranio en la tabla periódica (protoactinio). Su A es de 4 unidades menos debido a la partícula α que se emitió originalmente, es decir, contiene 234 nucleones.

La constante de desintegración será:

$$\lambda = \frac{Ln\ 2}{t_{1/2}} = \frac{Ln\ 2}{1620} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 4.27 \cdot 10^{-4}\ \text{años}}$$

Desde 1898 a 2010 han pasado 112 años, por tanto, el número de núcleos radiactivos que quedan pasado un tiempo t sería:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_o} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_o} = e^{-4.27 \cdot 10^{-4} \cdot 112} \rightarrow \boldsymbol{\frac{N}{N_o} = 0.9532}$$

Con lo que la cantidad de radio que queda viene dado por:

$$0.9532 \cdot 220\ mg = \mathbf{209.7\ mg}$$

Cuestión 4.- En el laboratorio del instituto medimos cuatro veces el tiempo que un muelle, separado de su posición de equilibrio, tarda en describir 20 oscilaciones de pequeña amplitud. Los resultados de la medición se muestran en la tabla. Determina el valor de la constante elástica del muelle.

Experiencia	Masa (g) (masa del platillo + pesa)	Tiempo 20 oscilaciones
1ª	290 g	16.40 s
2ª	310 g	17.20 s
3ª	330 g	18.15 s
4ª	430 g	20.46 s

En oscilaciones de pequeña amplitud → MAS:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Experiencia	Periodo (s) $T = \frac{t}{20}$	Masa (kg)	K (N/m)
1ª	0.8200	0.29	17.0
2ª	0.8600	0.31	16.5
3ª	0.9075	0.33	15.8
4ª	1.0230	0.43	16.2

La constante del muelle será una media de las distintas k:

$$k = \frac{17 + 16.5 + 15.8 + 16.2}{4} \rightarrow \mathbf{k = 16.4\ ^{N}/_{m}}$$