Universidad de Castilla La Mancha – Junio – 2014

Opción A

Problema 1.- Un planeta gigante tiene dos satélites, S1 y S2, cuyos periodos orbitales son T_1 = 4.52 días terrestres y T_2 = 15.9 días terrestres respectivamente.

a) Si el radio de la órbita del satélite S1 es de $5.27\cdot10^8$ m, calcular la masa del planeta.
b) Calcular el radio de la órbita del satélite S2 en km.
c) Si un meteorito inicia un movimiento de caída libre sin velocidad inicial hacia el planeta desde la órbita de S2, ¿cuál será su velocidad cuando pase por la órbita de S1?

Constante de gravitación $6.67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$.

Para que el satélite no se salga de su órbita: $|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}|$

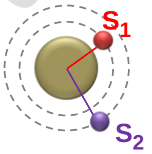
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{F_g}| = G\dfrac{m\cdot M}{R^2} \\ |\vec{F_c}| = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{\omega^2R^2}{R} = m\omega^2R = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R \end{array}\right\} \rightarrow G\frac{m\cdot M}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow M = \frac{4\pi^2R^3}{T^2\,G} = \frac{4\pi^2\left(5.27\cdot10^8\right)^3}{(4.52\cdot24\cdot3600)^2\cdot 6.67\cdot10^{-11}}$$

$$\rightarrow \mathbf{M = 5.68\cdot10^{26}\ kg}$$

Igual que en el caso anterior, $|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}|$:

$$|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}| \rightarrow G\frac{m\cdot M}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot5.68\cdot10^{26}\cdot(15.9\cdot24\cdot3600)^2}{4\pi^2}} \rightarrow \mathbf{R_{S2} = 1.22\cdot10^9\ m}$$

Cuando el meteorito se encuentra en la órbita de S2 toda su energía es energía potencial. Cuando pasa por la órbita de S1, parte de la energía potencia se habrá convertido en cinética. Teniendo en cuenta que la energía mecánica (suma de la potencial y la cinética) se conserva:



$$\left.\begin{array}{l} E_{P.\ S2} = -G\dfrac{m\cdot M}{R_2} \\ E_{P.\ S1} = -G\dfrac{m\cdot M}{R_1} \end{array}\right\} E_{C.\ S1} = E_{P.\ S2} - E_{P.\ S1} = -G\frac{m\cdot M}{R_2} + G\frac{m\cdot M}{R_1} \rightarrow E_{C.\ S1} = G\cdot m\cdot M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Por otro lado:

$$E_{C.\ S1} = \frac{1}{2}m\,v^2$$

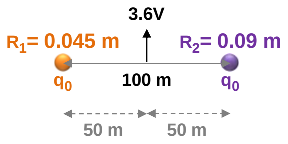
Igualando:

$$G\cdot m\cdot M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{2\cdot G\cdot M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \sqrt{2\cdot6.67\cdot10^{-11}\cdot5.68\cdot10^{26}\left(\frac{1}{5.27\cdot10^8} - \frac{1}{1.22\cdot10^9}\right)} \rightarrow \mathbf{v = 9034\ ^m/_s}$$

Problema 2.- Se tienen dos esferas conductoras de radios 4.5 cm y 9 cm, aisladas entre sí y separadas una distancia de 100 m entre sus centros. Las dos esferas tienen inicialmente la misma carga q_0.

a) Sabiendo que el potencial en el punto medio de la distancia que las separa es 3.6 V, calcular la carga q_0 y el potencial de cada esfera.
b) Si las dos esferas se ponen en contacto mediante un hilo conductor muy fino cuya capacidad de almacenar carga puede despreciarse, calcular el potencial final al que quedan ambas esferas y la carga de cada una de ellas. Explicar cuál es el fundamento físico en que nos basamos para hacer los cálculos correspondientes.

Constante de Coulomb $k = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$.



Como las esferas las separa una gran distancia, se comportan como cargas puntuales, por lo que el potencial en el punto medio sería:

$$V(r) = k\frac{q}{r} \rightarrow V(P_{medio}) = k\frac{q}{r_1} + k\frac{q}{r_2} = k\,q\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \rightarrow r_1 = r_2 \rightarrow V(P_{medio}) = k\,q\,2\,\frac{1}{r} \rightarrow q = \frac{V\,r}{2\,k} = \frac{3.6\cdot50}{2\cdot9\cdot10^9} \rightarrow \mathbf{q = 10^{-8}\ C}$$

Con lo que el potencial de cada esfera:

$$V_1 = k\frac{q}{r_1} = 9\cdot10^9\frac{10^{-8}}{0.045} \rightarrow \mathbf{V_1 = 2000\ V} \qquad V_2 = k\frac{q}{r_2} = 9\cdot10^9\frac{10^{-8}}{0.09} \rightarrow \mathbf{V_2 = 1000\ V}$$

Si las dos esferas se conectan mediante un hilo conductor, sus potenciales se igualarán, debido a un movimiento de cargas de una esfera a otra:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = k\dfrac{q_1}{r_1} \\ V_2 = k\dfrac{q_2}{r_2} \end{array}\right\} V_1 = V_2 \rightarrow\ k\frac{q_1}{r_1} = k\frac{q_2}{r_2} \rightarrow \frac{q_1}{0.045} = \frac{q_2}{0.09} \rightarrow \mathbf{2\ q_1 = q_2}$$

Por otra parte, si el hilo conductor tiene una capacidad despreciable, la suma de las cargas iniciales tiene que ser igual a la carga total inicial, según el principio de conservación de la carga:

$$q_1 + q_2 = 2\ q_0 \rightarrow \mathbf{q_1 + q_2 = 2\cdot 10^{-8}}$$

Hacemos un sistema de ecuaciones para calcular cada carga:

$$\left.\begin{array}{l} 2\ q_1 = q_2 \\ q_1 + q_2 = 2\cdot 10^{-8} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{q_1 = 6\cdot 10^{-9}\ C} \rightarrow \mathbf{q_2 = 1.3\cdot 10^{-8}\ C}$$

Por lo que los potenciales de cada esfera serán:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_1 = k\dfrac{q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9 \dfrac{6\cdot 10^{-9}}{0.045} \rightarrow \mathbf{V_1 = 1333.33\ V} \\ V_2 = k\dfrac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9 \dfrac{1.3\cdot 10^{-8}}{0.09} \rightarrow \mathbf{V_2 = 1333.33\ V} \end{array}\right.$$

Cuestión 1.- Una pequeña bolita sujeta del techo por un hilo delgado se separa de la vertical un ángulo de 5º y se deja oscilar libremente como un péndulo simple. Después se separa de la vertical un ángulo de 10º y también se deja oscilar libremente como péndulo simple.

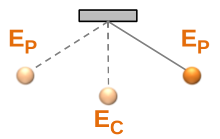
a) ¿Serán iguales los periodos en los dos casos?
b) ¿Serán iguales las velocidades cuando la bolita pasa por la posición vertical? Argumentar razonadamente.

(a) La bolita realiza un movimiento armónico simple, donde el periodo viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

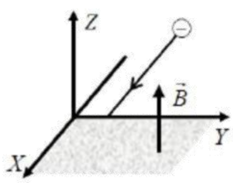
Como se puede ver no depende de la amplitud de la oscilación, sino únicamente de la longitud del hilo (péndulo) y de la aceleración de la gravedad. Por lo que el **periodo es el mismo** en ambos casos, ya que el péndulo es el mismo y la gravedad igual.

(b) La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se mantiene constante a lo largo de una oscilación completa, en ausencia de rozamiento. Al principio toda energía es potencial, a medida que la bolita se acerca a la posición de equilibrio toda esta energía se transforma en energía cinética, para finalmente volverse a convertir en energía potencial cuando vuelve a subir:



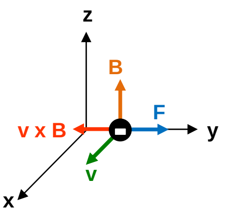
De esta forma, cuanto mayor sea la amplitud, mayor será la energía potencial y por tanto, mayor será la energía cinética, en definitiva, cuanto mayor sea la amplitud de la oscilación, mayor será la velocidad del bolita cuando pase por la posición de equilibrio.

Cuestión 2.- Una partícula cargada negativamente que viaja con velocidad constante penetra en la zona sombreada (región positiva x > 0 del plano XY, véase dibujo adjunto), en la cual existe un campo magnético uniforme B dirigido verticalmente hacia arriba. Explicar razonadamente qué trayectoria seguirá y dibujar un esquema de la misma.

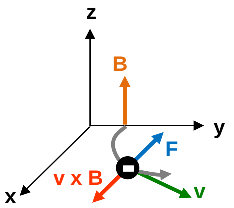


La fuerza magnética a la que se ve sometida la partícula negativa es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



Como el módulo de la velocidad es constante, dentro del campo magnético sólo cambia su dirección. Con lo que aplicando la regla de la mano derecha, se observa que la partícula negativa sigue una trayectoria circular en sentido antihorario, alrededor de las líneas del campo magnético.



Cuestión 3.- El radioisótopo iodo-131 tiene un periodo de semidesintegración de 8 días ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la actividad de una muestra de este material se reduzca hasta el 10% de su valor original?

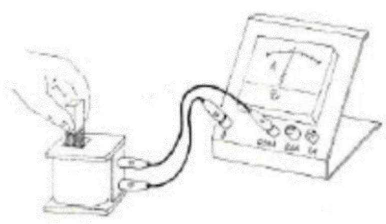
A partir del periodo de semidesintegración podemos calcular la constante de desintegración:

$$t_{1/2} = \frac{\text{Ln } 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\text{Ln } 2}{t_{1/2}} = \frac{\text{Ln } 2}{8} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.0866 \text{ días}^{-1}}$$

A partir de la ecuación de desintegración radiactiva y teniendo en cuenta que el material se reduce al 10% $\left(\frac{N}{N_0} = 0.10\right)$:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \rightarrow 0.10 = e^{-\lambda t} \rightarrow \text{Ln } 0.10 = -\lambda t \rightarrow t = -\frac{\text{Ln } 0.10}{\lambda} = -\frac{\text{Ln } 0.10}{0.0866} \rightarrow \boldsymbol{t = 26.57 \text{ días}}$$

Cuestión Experimental.- Un estudiante de Física dispone de una bobina formada por un estrecho arrollamiento de espiras de cable conductor y un amperímetro conectado con la misma (ver figura). El estudiante tiene dos imanes: uno de gran potencia y otro poco potente ¿De qué forma registrará el amperímetro una lectura mayor, si introduce el imán potente y lo deja en reposo en el interior del hueco de la bobina o si mueve el imán menos potente alternativamente hacia dentro y hacia fuera en el hueco de la bobina? Justificar la respuesta.



Según la ley de Faraday: la *fem* que da lugar a la corriente eléctrica inducida en un circuito, es igual a la rapidez con que varía el flujo magnético a través del mismo, es decir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

Si hay un imán dentro del hueco de la bobina, el campo magnético del imán origina un flujo magnético no nulo que será mayor cuanto más potente sea el imán.

- Si el imán está quieto, el flujo magnético será constante, independientemente de la potencia del imán, por lo que la fem será nula y las cargas libres del hilo conductor de la bobina permanecen inmóviles y, por tanto, el amperímetro no registrará lectura alguna.
- Si el imán se mueve, el flujo magnético será variable con el tiempo con lo que la fem no será nula. Por tanto, se generará una corriente eléctrica que será registrada por el amperímetro.

Opción B

Problema 1.- Una onda armónica transversal de periodo T = 2s se propaga con velocidad de 60 cm/s en sentido positivo a lo largo de una cuerda tensa orientada según el eje X. Se sabe que el punto de la cuerda de abscisa x = 30cm oscila en la dirección del eje Y, de forma que cuando t = 1s la elongación es nula y su velocidad es positiva; y en el instante t = 1.5s su elongación es 5 cm y su velocidad es nula. Se pide:

a) La frecuencia y la longitud de onda.
b) La fase inicial, la amplitud de la onda armónica y su expresión matemática.
c) La diferencia de fase de oscilación de dos puntos separados por un cuarto de longitud de onda.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v \cdot T = 60 \cdot 2 \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{f = 0.5 \text{ Hz}}$$

$$y\,(x,t) = A\cdot \text{sen}\,(\omega t \pm kx + \delta_0) \rightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \rightarrow \boldsymbol{\omega = \pi\ \text{rad}/\text{s}} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{k = 1.66\pi\ m^{-1}} \\ \text{Sentido (+) del eje x: } \boldsymbol{-} \end{cases} \rightarrow y\,(x,t) = A\cdot \text{sen}\,(\pi t - 1.66\pi x + \delta_0)$$

Cuando x=0.3m, t=1s e y=0m, por lo que la velocidad será máxima (cuando el coseno sea igual a +1):

$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow v = A\omega\cdot\cos\,(\omega t - kx + \delta_0) \rightarrow \cos\,(\omega t - kx + \delta_0) = 1 \rightarrow \omega t - kx + \delta_0 = 0 \rightarrow \pi - 0.5\pi + \delta_0 = 0 \rightarrow \boldsymbol{\delta_0 = -\frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$$

Cuando x=0.3m, t=1.5s, y=0.05m y v=0m/s:

$$y\,(x,t) = A\cdot \text{sen}\,(\pi t - 1.66\pi x + \delta_0) \rightarrow 0.05 = A\cdot\text{sen}\,(1.5\pi - 0.5\pi - 0.5\pi) \rightarrow 0.05 = A\cdot\text{sen}\,(\pi) \rightarrow 0.05 = A\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{A = 0.05\ m}$$

$$\boldsymbol{y\,(x,t) = 0.05\cdot\text{sen}\left(\pi t - 1.66\pi x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

El desfase entre dos puntos separados $\frac{\lambda}{4} = 0.3$ m:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \left|\left(\pi t_1 - 1.66\pi x_1 - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\pi t_2 - 1.66\pi x_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right| \rightarrow \boldsymbol{t_1 = t_2} \rightarrow \Delta\delta = 1.66\pi\,|x_1 - x_2| = 1.66\pi\cdot 0.3 \rightarrow \boldsymbol{\Delta\delta = 0.5\pi\ \text{rad}}$$

Problema 2.- Un ión de masa $6.64\cdot10^{-26}$kg, cargado positivamente, es acelerado desde el reposo mediante una diferencia de potencial de 5025 V y a continuación se le hace entrar perpendicularmente a las líneas de campo en un campo magnético de 0.1 T donde describe una órbita circular de radio 45.68 cm.

a) Calcular la carga del ion.
a) Explicar si el sentido en que este ion describirá la órbita es horario o antihorario. Se valorará un diagrama adecuado para ilustrar la explicación.
b) Si un protón se hiciese entrar en el mismo campo magnético con la misma energía cinética que el ión al que se refiere el apartado a), ¿cuál sería su velocidad y el radio de su órbita?

Datos del protón: masa = $1.66\cdot10^{-27}$kg; carga = $1.60\cdot10^{-19}$ C.

Si un catión, se somete a una diferencia de potencial, el incremento de energía potencial se transforma en energía cinética:

$$E_C = \Delta E_P = q\,\Delta V \rightarrow \frac{1}{2}\,m\,v^2 = q\,\Delta V \rightarrow q = \frac{m\,v^2}{2\,\Delta V}$$

Cuando el catión entra perpendicularmente en el campo magnético, la fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta (trayectoria curvilínea):

$$F_m = F_C \rightarrow q\cdot v\cdot B = \frac{m\,v^2}{R}$$

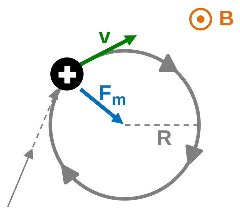
Sustituyendo el valor de la carga, podemos calcular la velocidad:

$$\frac{m\,v^2}{2\,\Delta V}\cdot v\cdot B = \frac{m\,v^2}{R} \rightarrow v = \frac{2\,\Delta V}{R\,B} = \frac{2\cdot 5025}{0.4568\cdot 0.1} \rightarrow \boldsymbol{v = 2.2\cdot10^5\ m/s}$$

Y ahora calculamos la carga del catión:

$$q = \frac{m\,v^2}{2\,\Delta V} = \frac{6.64\cdot10^{-26}\,(2.2\cdot10^5)^2}{2\cdot 5025} \rightarrow \boldsymbol{q = 3.19\cdot10^{-19}\ C}$$

El sentido del giro aplicando la regla de la mano derecha y visto desde arriba, tiene sentido **horario**:



Si entra un protón en el mismo campo magnético y con la misma energía cinética:

$$E_C = \Delta E_P = q\,\Delta V = 3.20\cdot10^{-19}\cdot 5025 \rightarrow \boldsymbol{E_C = 1.6\cdot10^{-15}\,Jul} \rightarrow E_C = \frac{1}{2}\,m_p\,v_p^2 \rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2\,E_C}{m_p}} = \sqrt{\frac{2\cdot1.6\cdot10^{-15}}{1.66\cdot10^{-27}}} \rightarrow \boldsymbol{v_p = 1.39\cdot10^6\ m/s}$$

Como la fuerza magnética es igual a la fuerza centrípeta:

$$F_m = F_C \rightarrow q\cdot v\cdot B = \frac{m\,v^2}{R} \rightarrow R = \frac{m\,v^2}{q\cdot v\cdot B} = \frac{m\,v}{q\cdot B} = \frac{1.66\cdot10^{-27}\cdot 1.39\cdot10^6}{1.6\cdot10^{-19}\cdot 0.1} \rightarrow \boldsymbol{R = 0.144\ m = 14.4\ cm}$$

Cuestión 1.- Explicar qué es la velocidad de escape desde la superficie de un planeta y demostrar cómo se calcula su valor.

La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la mínima energía que hay que suministrarle a un cuerpo situado en dicha superficie para que se libere de la fuerza de atracción que ejerce el planeta sobre él y alejarse ilimitadamente de dicho planeta, hasta llegar al infinito con velocidad nula.

Cuando el cuerpo está en la superficie del planeta, la energía total del sistema es igual a la energía potencial, al estar parado el cuerpo ($E_C=0$):

$$E_{Sup.} = -G\frac{M_P\, m_C}{R_P}$$

Cuando el cuerpo empieza a elevarse, parte de la energía potencial se convierte en energía cinética:

$$E_{Total} = E_{Sup.} + E_C$$

Cuando un cuerpo alcanza la velocidad de escape, su energía será cero, es decir, un cuerpo con energía cero abandonará un campo gravitatorio:

$$E_\infty = E_{Sup.} + E_C \rightarrow 0 = -G\frac{M_P\, m_C}{R_P} + \frac{1}{2} m_C\, v_e^2 \rightarrow G\frac{M_P\, m_C}{R_P} = \frac{1}{2} m_C\, v_e^2 \rightarrow \mathbf{v_e} = \sqrt{\frac{\mathbf{2\,G\,M_P}}{\mathbf{R_p}}}$$

Cuestión 2.- El campo eléctrico originado por una configuración estática de carga eléctrica es conservativo ¿Qué quiere decir esta afirmación? ¿Qué relación tiene con el potencial eléctrico?

Un campo es conservativo cuando el trabajo total realizado por dicho campo sobre un cuerpo que se desplaza entre dos posiciones, es independiente de la trayectoria y dependiente sólo de la posición inicial y la final. Por tanto, si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, el trabajo total realizado por el campo será nulo, debido a que el punto de partida y final es el mismo.

En el caso de un campo creado por cargas estáticas, el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre cualquier carga que se traslade entre dos puntos es independiente de la trayectoria que siga dicha carga.

Cuando el campo es conservativo, existe una función escalar que depende de las coordenadas, de forma que el campo es proporcional al vector gradiente de dicha función. En el caso del campo eléctrico, la función escalar es el potencial eléctrico.

El vector gradiente indica en cada punto cuál es la dirección en la que la función escalar varía más rápidamente. En el caso del campo eléctrico el vector gradiente es negativo, puesto que el campo eléctrico apunta desde los lugares de mayor a los de menor potencial eléctrico:

$$\vec{E} = -\mathit{grad}\ V$$

Cuestión 3.- Un rayo de luz azul y un rayo de luz roja inciden sobre la superficie plana de una lámina de vidrio formando ambos el mismo ángulo con la normal. Si el índice de refracción del vidrio es directamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente, ¿cuál de los dos rayos tendrá un ángulo de refracción mayor?

La luz azul tiene menor longitud de onda que la luz roja, como la frecuencia y la longitud de onda viene relacionadas de la siguiente forma:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Podemos decir que la luz azul tiene mayor frecuencia que la luz roja.

Si el índice de refracción del vidrio es directamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente, significa que $\mathbf{n_{Azul} > n_{Rojo}}$.

Por otro lado, si aplicamos la ley de Snell, teniendo en cuenta que el $n_{aire} = 1$ y que $\hat{i}_{Azul} = \hat{i}_{Rojo}$:

$$\left.\begin{array}{l} n_{aire}\,\text{sen}\,\hat{i}_{Azul} = n_{Azul}\,\text{sen}\,\hat{r}_{Azul} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_{Azul} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{i}_{Azul}}{n_{Azul}} \\ n_{aire}\,\text{sen}\,\hat{i}_{Rojo} = n_{Rojo}\,\text{sen}\,\hat{r}_{Rojo} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_{Rojo} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{i}_{Rojo}}{n_{Rojo}} \end{array}\right\} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_{Azul} < \text{sen}\,\hat{r}_{Rojo} \rightarrow \mathbf{\hat{r}_{Azul} < \hat{r}_{Rojo}}$$

Por tanto, el rayo de **luz roja** tendrá un ángulo de refracción mayor.

Cuestión Experimental.- Un estudiante quiere determinar la constante elástica de un muelle en el laboratorio de Física. Para ello cuelga distintas masas del muelle y lo deja oscilar libremente, midiendo los tiempos invertidos en realizar 16 oscilaciones (masas m y tiempo t en la tabla).
Explicar de qué forma deben tratarse los datos y calcular cuál es la constante elástica del muelle estudiado.

m (gr)	t (s)
90	6.0
120	7.0
150	7.8
180	8.5

Siendo el periodo de oscilación de un resorte cargado con una masa m:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = 4\pi^2\frac{m}{T^2}$$

m (kg)	t(s)	$T = \dfrac{t}{16\ \text{oscilaciones}}$	k(N/m)
0.09	6.0	0.375	25.3
0.12	7.0	0.438	24.8
0.15	7.8	0.488	24.9
0.18	8.5	0.531	25.2

$$k = \frac{25.3 + 24.8 + 24.9 + 25.2}{4} \rightarrow \mathbf{k = 25\ {}^{N}/_{m}}$$